MECHANIK ALS MOTIVATION IN DER SCHULMATHEMATIK

G. Benz, Essen

"Wozu soll ich das lernen?" In den meisten Fällen gilt diese Frage irgendeinem mehr oder weniger abstrakt anmutendem Teilgebiet der Mathematik. Gestellt wird sie von Leuten, die fest davon überzeugt sind, ihren Lebensunterhalt später auf einem Gebiet zu finden, das mit diesem ungeliebten Fach überhaupt nichts zu tun hat. Früher war das sicherlich viel leichter möglich als heute. Bei der Berufswahl hatte man (fast) alle Freiheiten und konnte sich Tätigkeiten suchen, bei denen man vor der Mathematik einigermaßen sicher war. Heute ist diese Wahl zum einen durch Angebot und Nachfrage bestimmt, zum anderen hat sich die Mathematik inzwischen neue Anwendungsgebiete erobert und ist auf die eine oder andere Weise in viele Lebensbereiche eingedrungen. Auf die Frage nach dem Wozu gäbe es also die einfache Antwort: "Zur Wahrung der Berufschancen!" Für ein bißchen Motivation könnte das genügen, es reicht aber sicher nicht aus, um Ablehnende zu überzeugen oder gar zu begeistern.

Nun soll keineswegs behauptet werden, daß dies ausgerechnet auf dem Umweg über die Mechanik möglich ist, obwohl Fragestellungen und Erkenntnisse der Mechanik immer wieder Impulse für bedeutende Neu-,und Weiterentwicklungen der Mathematik gegeben haben. Aber so, wie die Freude über eine gelungene Handarbeit die Vervollkommnung der eigenen Handfertigkeit herausfordert, kann vielleicht auch die erarbeitete Antwort auf eine Frage aus dem Alltag die Brauchbarkeit des Bekannten bestätigen und das Interesse an weitergehenden Kenntnissen wecken. Zugleich kann aber dabei (und das halte ich für ganz wesentlich) recht anschaulich gezeigt werden, daß der im Mathematikunterricht vermittelte Stoff keine Sammlung von Einzelfakten darstellt, die nacheinander erarbeitet und geübt (und dann wieder vergessen) werden, sondern daß er Teil eines weiterreichenden Gesamtwissens ist mit Zusammenhängen und Querverbindungen zu anderen Wissensdisziplinen.

Ein ganz einfaches Beispiel aus der Vektorrechnung sei an den Anfang gestellt (Abb.1). Ein Kraftwagen (1) fährt mit konstanter Geschwindigkeit eine gerade Straße entlang . Ein Außenstehender würde seine Position beschreiben durch das Aneinanderfügen des Ortsvektors r_{10} zum Anfangspunkt und eines Vektors $s_1 = t\,v_1$, der den zurückgelegten Weg beschreibt. Auf die gleiche Weise erhält er auch den Vektor r_2 zur Beschreibung der Position eines zweiten gleichförmig bewegten Fahrzeugs (2) auf einer kreuzenden Straße.

Es kommt immer wieder vor, daß beide Fahrzeuge zur gleichen Zeit auf der Kreuzung ein- und dann dort zusammentreffen. Für jeden

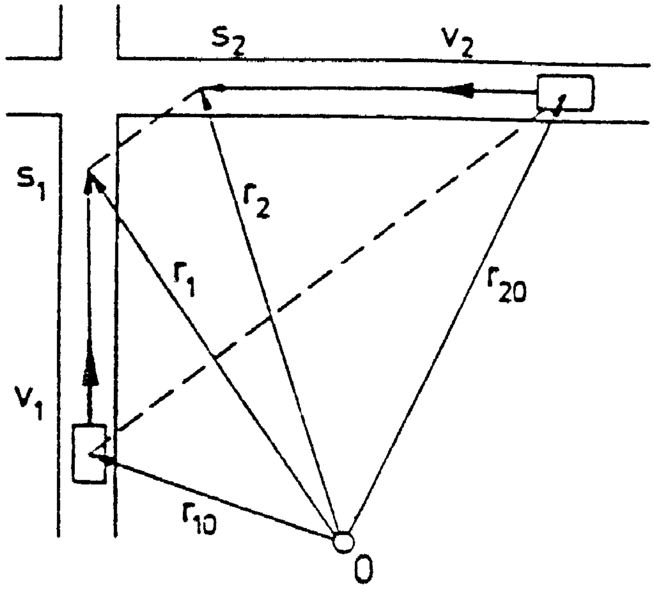

Abb. 1

Außenstehenden ist es unbegreiflich, wie es zu einem solchen Unfall auf einer weithin übersichtlichen Kreuzung kommen konnte. Aus seiner absoluten Position heraus war die Entwicklung der Dinge von Anfang an vorhersehbar. Aus der Sicht der Fahrer stellt sich der Ablauf aber ganz anders dar. Sie sehen sich gegenseitig in den Positionen

$$\overline{e}_{12} = -\overline{e}_{21} = \overline{r}_2 - \overline{r}_1 .$$
$$= \overline{r}_{20} - \overline{r}_{10} + \overline{s}_2 - \overline{s}_1 .$$
$$= \overline{r}_{20} - \overline{r}_{10} + t\ (\overline{v}_2 - \overline{v}_1).$$

Irgendwann, sagen wir, zum Zeitpunkt t_1, wird also $r_1 = r_2$ und damit $e_{12} = e_{21} = 0$. Dann ist

$$\overline{r}_{20} - \overline{r}_{10} = - t_1 (\overline{v}_2 - \overline{v}_1)$$

und es war immer

$$\overline{e}_{12} = (\overline{r}_{20} - \overline{r}_{10})(1 - t/t_1)$$

Der Abstandsvektor wird also nur kürzer, ohne seine Richtung zu ändern. Mit anderen Worten, die beiden Fahrer sehen sich immer unter dem gleichen Blickwinkel, die Position des "Gegners" im Blickfeld bleibt wie die aller Teile des eigenen Fahrzeugs unverändert, weshalb ein Fahrzeug auf Kollisionskurs unbewußt unter "ungefährlich" eingestuft wird. Ein feststehendes Hindernis erweckt dagegen sehr viel mehr Aufmerksamkeit, weil seine Relativbewegung auch in der Änderung des Blickwinkels und nicht nur durch die Änderung seiner Größe sichtbar wird. In der Seefahrt ist der Warnruf "Peilung steht" wohlbekannt, und es wäre nur zu wünschen, daß seine Bedeutung auch allen Kraftfahrern, den Fahrlehrern und den Verkehrsrichtern geläufig wird.

Jeder, der schon einmal einen Schrank verschoben hat, weiß, daß dazu eine "Kraft" nötig ist und daß dieser Begriff zweierlei beinhaltet: die Größe (die Stärke, den Betrag) und die Richtung. Nicht nur die Verschiebung, sondern auch deren Ursache kann man also durch einen Vektor beschreiben. Es lohnt nicht, darüber zu streiten, ob sich Kräfte wie Vektoren oder Vektoren wie Kräfte addieren, jedenfalls lassen sie sich zu einer Resultierenden zusammenfassen. Und wenn die Resultierende aller an einem Körper angreifenden Kräfte verschwindet, also Null ist, dann sagt man, der Körper sei im Gleichgewicht. Meist denkt man dabei an den ruhenden Körper (an das statische Gleichgewicht). Wenn man aber die jeder Beschleunigung entgegenwirkenden Trägheitskräfte mit in die Bilanz einbezieht, dann gilt diese Aussage auch für das "dynamische Gleichgewicht" eines bewegten Körpers.

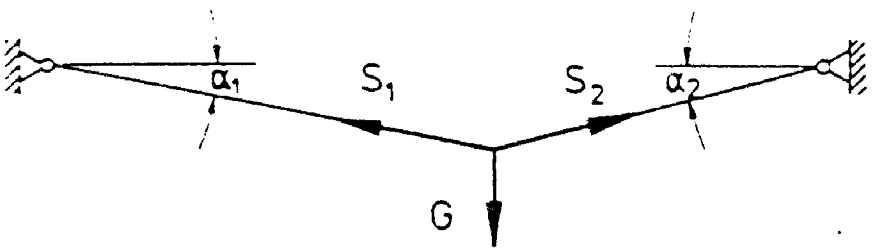

Abb. 2

Damit also eine Wäscheleine mit einem angehängten Einzelstück G (siehe Abb.2) im Gleichgewicht ist, muß die Summe der die Belastung und die Seilkräfte darstellenden Vektoren Null ergeben:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{G} + \vec{S}_1 + \vec{S}_2 = 0.$$

Das wiederum heißt, daß sowohl die Horizontal- wie die Vertikalkomponente des resultierenden Vektors verschwinden muß:

$$-S_{1h} + S_{2h} = 0.$$
$$S_{1v} + S_{2v} - G = 0.$$

Die Horizontalkomponente der Seilkraft ist $S*\cos\alpha$, ihre Vertikalkomponente $S*\sin\alpha$. Damit erhält man

$$S_{1h} = S_1 \cos\alpha_1 = S_{2h} = S_2 \cos\alpha_2 =: S_h .$$
$$S_1 \sin\alpha_1 + S_2 \sin\alpha_2 = G.$$

und indem man beide Zeilen durcheinander dividiert,

$$\tan\alpha_1 + \tan\alpha_2 = G / S_h .$$

Aus schwer nachvollziehbaren Gründen besteht die Mehrzahl der Hausfrauen auf straff gespannten Wäscheleinen. Bei 5 m Spannweite sind 10 cm Durchhang (dank der Dehnbarkeit der Leine) schon an der Toleranzgrenze. Im günstigsten Fall (was als Extremwertaufgabe noch zu zeigen wäre!), wird mit $\alpha_1 = \alpha_2$

$$\tan \alpha = \frac{10}{250} = 0.04 \;, \; S_h = 12.5\ G \;,$$

das heißt, der Horizontalzug ist mehr als das zwölffache des Gewichts. Wen wunderts, daß hin und wieder eine Wäscheleine reißt oder ein Haken aus der Wand gezogen wird. Mit Stangen statt mit Seilen und mit Druck- statt mit Zugkräften findet man dasselbe Prinzip sinnvoll angewandt bei der Kniehebelpresse und als Wagenheber.

Wie die Vektorrechnung hat auch die Infinitesimalrechnung entscheidende Anstöße aus der Mechanik bezogen. Viele mehr oder weniger abstrakte Begriffe haben hier ein anschauliches Gegenstück. So demonstrieren z.B. die Begriffe "Mittlere Geschwindigkeit" (in fünf Stunden von Wien nach Salzburg) und "augenblickliche Geschwindigkeit" (500 öSch wegen Geschwindigkeitsübertretung) deutlich den Unterschied zwischen Differenzen- und Differentialquotient. Die dem Kraftfahrer geläufigen Begriffe "Anfahrbeschleunigung" und "Bremsverzögerung" sind Beispiele für eine höhere Ableitung und Anlaß für die Umkehroperation, wenn z.B. nach dem Bremsweg eines Fahrzeugs gefragt wird. Mit einer als konstant angenommenen Verzögerung b erhält man durch Integration die Geschwindigkeit

$$v = -\int_0^t a\,d\tau + v_0 = -at + v_0$$

und mit einem zweiten Schritt den Weg

$$s = \int_0^t (-a\tau + v_0)\,d\tau + s_0 = -\frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$$

mit den beiden Integrationskonstanten v_0 und s_0.

Die Bremsdauer t_1, nach der das Fahrzeug zum Stillstand kommt, ist $t_1 = v_0/b$, der in dieser Zeit zurückgelegte Weg ist

$$s - s_0 = \left(-\frac{1}{2}at_1 + v_0\right) t_1 = \frac{1}{2} v_0 t_1 \,.$$

Dies sieht fast so aus, als würde die Faustformel "Abstand zum Vordermann in Meter gleich halber Tachogeschwindigkeit in km/h" einen sicheren Bremsweg versprechen. So ist es aber keineswegs.

Substituiert man nämlich im Ausdruck für den Bremsweg die Bremsdauer, so sieht man sofort, daß der Bremsweg nicht der Geschwindigkeit, sondern ihrem Quadrat proportional ist. Die Faustformel stellt lediglich eine von der Geschwindigkeit unabhängige, konstante Reaktionszeit zur Verfügung, in der je nach Aufmerksamkeit

5 bis 1 3 des Abstandes verbraucht wird. Der Rest muß dann ausreichen, um die Unterschiede in den Bremsleistungen der einzelnen Fahrzeuge auszugleichen.

Eine schier unerschöpfliche Zahl von Übungsbeispielen bietet die Mechanik für den Mittelwertsatz der Integralrechnung,

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

Für $f(x) = x$ definiert er mit dem Moment erster Ordnung die Schwerpunktskoordinate,

$$x_s \cdot A = \int x\,dA \quad , \quad x_s \cdot m = \int x\,dm ,$$

für $f(x) = x^2$ das Moment zweiter Ordnung (Trägheitsmoment) und den Trägheitsradius k,

$$k^2 \cdot A = \int x^2 dA \quad . \quad k^2 \cdot m = \int x^2 dm .$$

Der Integrationsbereich ist dabei in der Festigkeitslehre eine Fläche, in der Kinetik ein mit Masse erfülltes Volumen. Strenggenommen müßten also Mehrfachintegrale ausgewertet werden. In sehr vielen Fällen kann man sich aber durch die Einführung eines passenden Flächen- oder Volumenelementes daran vorbeimogeln.

Eine einfache Aufgabe aus diesem Gebiet ist die Frage nach dem sogenannten Stoßmittelpunkt eines Stabes (vgl. Abb.3). Eine Kraft, die in diesem Punkt angreift, zwingt den Stab zu einer Pendelbewegung um den Aufhängepunkt, ohne daß dort zusätzliche Lagerreaktionen auftreten. Umgekehrt bringt ein Anschlag an dieser Stelle den pendelnden Stab zur Ruhe, ohne daß das Lager eine Kraft übertragen muß. Wo liegt dieser Punkt?

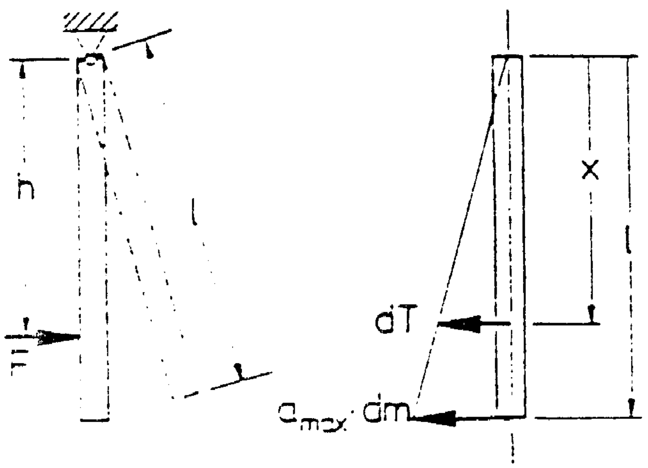

Abb. 3

weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Stabelementes wachsen linear mit seinem Abstand vom Drehpunkt. dasselbe gilt auch für die am Stabelement angreifende und zur Beschleunigung proportionalen Trägheitskraft. Der Abstand h des Angriffspunktes der

Einzelkraft muß nun so gewählt werden, daß die Trägheitskräfte $d\overline{T}$ in ihrer Gesamtheit kompensiert werden, die an den Massenelementen dm bei einer Drehung um den Aufhängepunkt auftreten:

$$h\overline{F} = \int_0^l x\,d\overline{T} \,.$$

Bezeichnet man mit die Stabmasse je Längenelement und mit a_s die Beschleunigung des Stabschwerpunktes, so wird

$$d\overline{T} = \overline{a}_{max}\,\frac{x}{l}\,dm = \frac{\overline{a}_{max}}{l}\,\mu x dx \,.$$

$$\overline{F} = \overline{a}_s \cdot m = \tfrac{1}{2}\,\overline{a}_{max} \cdot m$$

und damit

$$h = \tfrac{2}{3} l .$$

Wenn man im Wald beim Spazierengehen einen Ast gegen einen Baum schlägt, läßt sich diese Rechnung sehr überzeugend gewissermaßen aus dem Handgelenk kontrollieren. Ähnliche Probleme gibt es z.B. beim Hammerstiel, beim Schaufelstiel und bei der Montage eines Türstoppers, wenn der Stoß der aufschlagenden Tür nicht die Türangeln strapazieren soll.

Als vor über 100 Jahren im Kölner Dom die "Kaiserglocke" zum ersten Mal geläutet werden sollte, blieb sie stumm. Ihre Abmessungen waren so unglücklich gewählt worden, daß der Klöppel stets den gleichen Ausschlagwinkel wie die Glocke hatte und so nie anschlug. Ähnliches war schon früher bei kleineren Glocken vorgekommen, man mußte sie "rütteln", um sie zum Klingen zu bringen. Die Kaiserglocke war zu schwer dazu. Schließlich lieferte ein Gewerbelehrer namens Veltmann den theoretischen Hintergrund für dieses Phänomen.

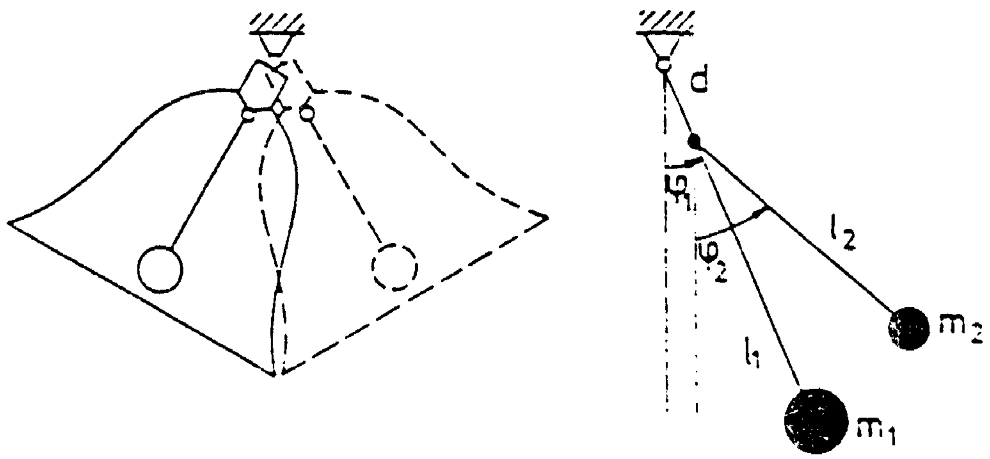

Abb. 5

Für die Ausschläge von Glocke (Index 1) und Klöppel (Index 2), siehe Abb.5, erhält man mit den reduzierten Pendellängen l , den Massen m und dem Abstand d die Bewegungsgleichungen

$$(m_1 l_1^2 + m_2 d^2)\ddot{\varphi}_1 + m_2 d l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\ddot{\varphi}_2 - m_2 d l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + (m_1 l_1 + m_2 d) g \sin\varphi_1 = 0$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 d l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\ddot{\varphi}_1 - m_2 d l_2 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + m_2 g l_2 \sin\varphi_2 = 0$$

Ihre Herleitung aus Energieausdrücken über die Euler-Lagrangeschen Gleichungen ist zwar eine schöne Übung im Differenzieren, sie würde aber hier zu weit führen. Interessant scheint mir vielmehr, daß man diese nichtlinearen Differentialgleichungen nicht etwa lösen muß, um die kritischen Werte zu bestimmen.

Für $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ erhält man die beiden Gleichungen

$$(m_1 l_1^2 + m_2 d^2 + m_2 d l_2)\ddot{\varphi} + (m_1 l_1 + m_2 d) g \sin\varphi = 0$$
$$(m_2 l_2^2 + m_2 d l_2)\ddot{\varphi} + m_2 l_2 \; g \sin\varphi = 0$$

die sich miteinander vertragen müssen. Das ist nur dann der Fall, wenn der Quotient der Koeffizienten in beiden Gleichungen denselben Wert hat. Es muß also sein:

$$(m_1 l_1^2 + m_2 d^2 + m_2 d l_2) \cdot m_2 l_2 g = (m_2 l_2^2 + m_2 d l_2)(m_1 l_1 + m_2 d) g$$

Durch Kürzen und Ausmultiplizieren folgt daraus $l_1 = l_2 + d$.

Dies scheint mir ein typisches Beispiel dafür, daß man die Lösung eines Problems nicht blindlings angehen soll, sodaß die Antwort womöglich weiter geht als die gestellte Frage. Niemand interessiert sich hier für die ohnehin nur näherungsweise angebbaren Lösungen der Bewegungsgleichung, das heißt für das explizite Zeitverhalten der Glockenschwingungen, aus denen man dann vielleicht auch Bedingungen für spezielle Eigenschwingungsformen herleiten könnte. Eine Beschränkung der Fragestellung von Anfang an nach gleichen Auslenkungen von Glocke und Klöppel zeigt einen ganz anderen und viel einfacheren Lösungsweg auf.

Es gibt eigentlich kein Teilgebiet der Schulmathematik, für das sich in der Mechanik keine Anwendung findet. Oft sind es gerade die in der Schule vermittelten Kenntnisse und Fertigkeiten, die einem zu einem schnelleren Überblick und einer besseren Anschauung verhelfen. Ein letztes Beispiel soll dies belegen.

Manche Näherungsverfahren zur Integration von nichtlinearen Differentialgleichungssystemen führen zunächst auf Terme, die Produkte oder Potenzen von harmonischen Zeitfunktionen enthalten. Die Näherung besteht dann darin, daß man versucht, Aussagen über das langfristige Lösungsverhalten zu gewinnen , indem man die schnell veränderlichen periodischen Ausdrücke durch ihre zeitlichen Mittelwerte ersetzt :

$$M = \frac{1}{T}\int_0^T \sin^m \alpha t \cos^n \beta t\,dt.$$

Von besonderem Interesse sind dabei diejenigen Terme, die den Einfluß der Erregerkräfte wiedergeben. Denn nur wenn deren Mittelwert von Null verschieden ist, hat die Erregung überhaupt einen wesentlichen Einfluß auf das Geschehen. Man könnte nun die Integrale über die Potenzen der Kreisfunktionen mit Hilfe von Rekursionsformeln auswerten. Einfacher und zweckmäßiger ist es aber, diese Ausdrücke durch wiederholte Anwendung der Beziehungen

$$\begin{aligned}
\sin x \ \sin y &= \tfrac{1}{2}\,[\cos(x-y) - \cos(x+y)] \\
\cos x \ \cos y &= \tfrac{1}{2}\,[\cos(x-y) + \cos(x+y)] \\
\sin x \ \cos y &= \tfrac{1}{2}\,[\sin(x-y) + \sin(x+y)]
\end{aligned}$$

umzuformen. Damit erhält man z.B. statt

$$z = \sin^2(\alpha t + \varphi_1)\cos(\beta t + \varphi_2)$$

(die φ_i sind zeitlich konstante "Phasenverschiebungswinkel") über

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}\,[1 - \cos 2x]$$

$$z = \tfrac{1}{4}\,[\cos(\beta t + \varphi_2) - \cos(2\alpha t - \beta t + \varphi_1 - \varphi_2) - \cos(2\alpha t + \beta t + \varphi_1 + \varphi_2)]$$

und kann sofort ablesen, daß für

$$2\alpha = \beta \quad \text{und} \quad 2\alpha = -\beta$$

das Argument zeitfrei, das zeitliche Mittel also konstant und von Null verschieden wird. Für alle anderen Verhältnisse α/β ist der Integrand eine mit der Zeit periodische Funktion, deren Mittelwert verschwindet.

Leider erwecken solche Umformungen von Jahr zu Jahr größeres Staunen bei den Studenten, da sie offensichtlich immer weniger darin geübt sind. Ähnlich ist es um viele andere "handwerklichen" Fähigkeiten bestellt, sei es das Aufsuchen der Hauptachsen eines Kegelschnitts, das Differenzieren eines Polynoms, die Manipulation einer einfachen Gleichung oder auch nur das Addieren zweier Zahlen. Vielleicht ist das eine oder andere dieser Beispiele als Wiederholungsübung dazu geeignet, Lücken aufzuzeigen und zu schließen.